b- En remarquant que $4-(e^t+e^{-t})^2=-(e^t-e^{-t})^2$, montrer que $\forall n\in IN^*$ et $\forall t\in IR_+^*$ on a $f^{n-1}(t)f'(t)K(t)=f^{n+2}(t)-f^n(t)$.

c- A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall n\in IN^*$ et $\forall x\in IR_+^*$ on a $\int_0^x f^{n-1}(t)f'(t)K(t)dt=\frac{1}{n}K(x)f^n(x)-\frac{1}{n}\int_0^x f^{n+2}(t)dt$

d- En déduire que $\forall n\in IN^*$ et $\forall x\in IR_+^*$ on a :

$$(n+1)F_{n+2}(x)-nF_n(x)=K(x)f^n(x).$$

Montrer alors que $u_{n+2}=\frac{n}{n+1}u_n$.

4/a- Soit n un entier naturel. Déterminer, en fonction de n, les deux termes u_{2n+1} et u_{2n+2}.

b- Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c- Montrer que $\forall n\in IN$ on a : $\frac{2n}{2n+1}\le\frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}}\le 1$

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}}$.

d- Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}{3\times5\times\ldots\times(2n-1)}\right)^2\times\frac{2}{2n+1}\right]=\pi$

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1

1/ $M(z)$ est un point invariant de $f\Leftrightarrow f(M)=M\Leftrightarrow\frac{z-a}{z-1}=z$

$\Leftrightarrow z-a=z(z-1)\Leftrightarrow z^2-2z+a=0.$

$\Leftrightarrow$ z est une solution de $E: z^2-2z+a=0$.

2/a- On suppose que $a=1+e^{2i\theta}$ où $\theta\in\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$.

$E: z^2-2z+1+e^{2i\theta}=0$

$\Delta'=1-1-e^{2i\theta}=(ie^{i\theta})^2$

donc $E\Leftrightarrow z=1-ie^{i\theta}$ ou $z=1+ie^{i\theta}$.

b- • $z=1-ie^{i\theta}=1-e^{i\pi/2}e^{i\theta}=1-e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$

$=e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}\left[e^{-i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}-e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}\right]=-2i\sin[\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}]e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}$.

$\star\theta\in\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[\Leftrightarrow\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{3\pi}{4}$

$\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}<\pi$

Donc $\sin[\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}]>0$

D'où $z=1-ie^{i\theta}=2\sin[\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}]e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\pi)}$

$=2\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})[\cos(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})]$

$=\left[2\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})\ ;\ \frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right]$